Analyse 1 - Suites numériques

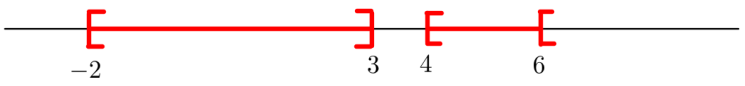
Prologue : propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Définition (Partie majorée, minorée, bornée)**.** *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que*

- *A est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A\,,\ x \leqslant M$.*
  *M est alors appelé un **majorant** de A.*
- *A est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A\,,\ x \geqslant m$.*
  *m est alors appelé un **minorant** de A.*
- *A est **bornée** si A est majorée **et** minorée.*

Exemple : la partie

$$A := [-2, 3] \cup [4, 6[$$



est bornée par : $\begin{cases} m := -2 \\ M := 6 \end{cases}$, mais aussi par $\begin{cases} m := -54 \\ M := 28 \end{cases}$.

Théorème/définition (Maximum et minimum)**.** *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

- *Si A est majorée et possède un majorant **qui est dans** A, alors celui-ci est unique. On l'appelle le **maximum** de A, noté* $\max(A)$.
- *Si A est minorée et possède un minorant **qui est dans** A, alors celui-ci est unique. On l'appelle le **minimum** de A, noté* $\min(A)$.

Démonstration. (de l'unicité du maximum) Supposons qu'il existe deux maximums M et $\tilde{M}$ de l'ensemble A. Alors :

$$\big(M \in A \text{ et } \tilde{M} \text{ est un majorant de } A\big) \quad \text{donc} \quad M \leqslant \tilde{M}$$

et

$$\big(\tilde{M} \in A \text{ et } M \text{ est un majorant de } A\big) \quad \text{donc} \quad \tilde{M} \leqslant M$$

Finalement, on a $\boldsymbol{M = \tilde{M}}$. □

Exemple : L'ensemble $A = [-2, 3] \cup [4, 6[$ a un minimum : $\min(A) = -2$, car $-2 \in A$, et $\forall x \in A$, $x \geqslant -2$.
En revanche, A n'a pas de maximum. En effet, les majorants de A sont les réels $M \geqslant 6$, et aucun d'entre eux n'appartient à A.

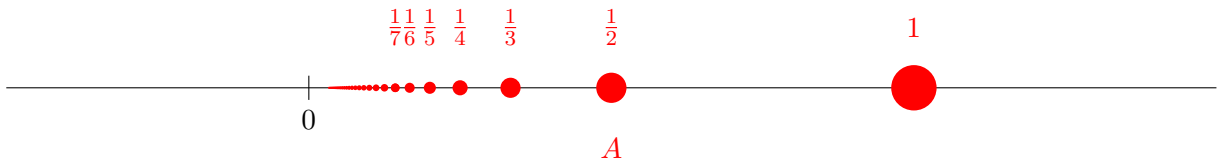
Théorème/définition (**Propriété de la borne supérieure**)**.** *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

- *Si A est non vide et majorée, alors l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément (un minimum). Ce plus petit majorant de A est appelé la **borne supérieure** de A, et noté* $\sup(A)$.
- *Si A est non vide et minorée, alors l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément (un maximum). Ce plus grand minorant de A est appelé la **borne inférieure** de A, et noté* $\inf(A)$.

Remarque. *Par convention, on note* $\sup(A) = +\infty$ *si A est non majorée et* $\inf(A) = -\infty$ *si A est non minorée.*

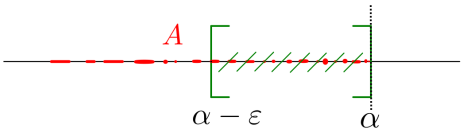
NB : la démonstration de ce théorème est hors programme (demande un éclaircissement théorique sur la définition de $\mathbb{R}$).

Exemple : on pose $A := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.



- $\sup(A) = 1$ car 1 est un majorant de A et tout autre majorant doit être supérieur à 1 car $1 = \frac{1}{1} \in A$: c'est donc le plus petit des majorants.
- $\inf(A) = 0$ car 0 est un minorant de A, et pour tout $\varepsilon > 0$, ε n'est pas un minorant de A, car on peut choisir $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{\varepsilon}$ de sorte que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Donc 0 est bien le plus grand minorant.

Remarque (Borne sup "presque atteinte")**.** *La borne supérieure α d'une partie A de $\mathbb{R}$ majorée, non vide, peut être atteinte par un élément de A (dans ce cas $\alpha = \max(A)$) ou ne pas l'être (comme dans l'exemple précédent où $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$, la borne inférieure n'était pas atteinte).*
Mais dans tous les cas, elle est «presque atteinte», au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[\alpha - \varepsilon, \alpha]$ contient un élément de A.



En effet, par définition de α, $\alpha - \varepsilon < \alpha$ ne peut pas être un majorant de A : il existe donc des éléments de A plus grands que $\alpha - \varepsilon$ et bien sûr plus petits que α qui majore A.

Définition (Intervalles de $\mathbb{R}$)**.** *On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie d'un des types suivants :*

$$[a, b] \ , \ ]a, b[\ , \ [a, b[\quad \text{ou} \quad]a, b]$$

où $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Proposition. *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ qui sont "sans trou", c'est-à-dire les parties I de $\mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\forall x \in I \ , \ \forall y \in I \quad , \quad [x, y] \subset I. \qquad (*)$$

Démonstration. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété $(*)$. Vérifions réciproquement qu'une partie I vérifiant la propriété $(*)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On pose $a = \begin{cases} \inf(I) \in \mathbb{R} & \text{si } I \text{ minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$ et $b = \begin{cases} \sup(I) \in \mathbb{R} & \text{si } I \text{ majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

On a $I \subset]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $[a, b]$ ou $]a, b]$ selon que $a \in I$ ou non, et $b \in I$ ou non.

Montrons que $]a, b[\subset I$:

Soit $z \in]a, b[$. z n'est pas un majorant de I car si $b = +\infty$, I n'est pas majorée, et si $b = \sup(I)$, b est "presque atteinte" par I, et donc $]z, b]$ contient des éléments de I. De la même façon, z n'est pas un minorant de I.

On peut donc trouver x et y dans I tels que $x < z < y$.

Donc $z \in [x, y]$. Or, $[x, y] \subset I$, d'après la propriété $(*)$. Donc $z \in I$.

On a donc bien I qui est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $[a, b]$ ou $]a, b]$. □

Exemple : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle mais la réunion de deux intervalles, à savoir $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

1 Généralités sur les suites

Définition. *Une suite (réelle) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

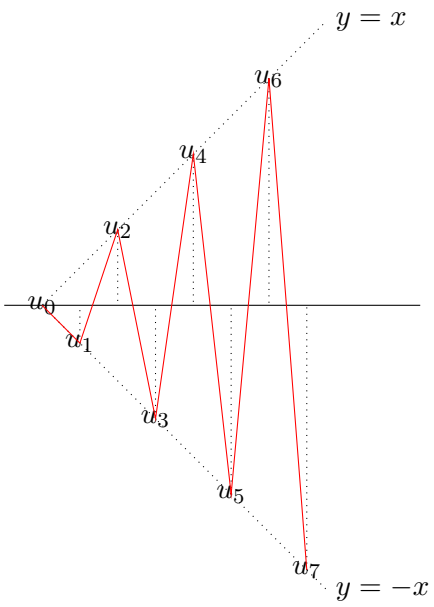
Notation. *Si u est une suite, l'image d'un entier n se note u_n plutôt que $u(n)$. On ne confondra pas une telle image avec la suite u. Cette dernière peut aussi se noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ puisque dans cette notation la variable est muette.*

Remarque. *La définition ci-dessus (tout comme les suivantes dans ce cours) s'étend aux suites qui débutent à un rang $p \neq 0$. On peut noter $(u_n)_{n\geqslant p}$ une telle suite.*

Définitions. *On dit qu'une suite u est :*

- ***majorée** s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$ (autrement dit, si l'ensemble des valeurs de u est une partie de $\mathbb{R}$ majorée) ;*
- ***minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$;*
- ***croissante** (resp. **décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \leqslant u_n$) ;*
- ***strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$) ;*
- ***monotone** si elle est croissante ou si elle est décroissante, et **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*
- ***stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.*

Exemple : posons $u = ((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$, de sorte que si n est pair $u_n = n$ et si n est impair $u_n = -n$.



Cette suite u n'est ni majorée, ni minorée, ni croissante, ni décroissante, ni monotone, ni stationnaire.

Remarque. *Comme pour toutes les fonctions à valeurs réelles, on a pour toute suite réelle u l'équivalence :*

$$(u \text{ bornée}) \iff (|u| \text{ majorée})$$

Définition. *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle suite extraite de u, toute suite du type $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\left(\varphi(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante.*

Exemples : $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n^2+4})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de u. En revanche, $(u_{\frac{n}{2}})_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucun sens car $\frac{n}{2}$ n'est pas toujours entier et la suite $(u_{(n-4)^2})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de u car la suite d'entiers $((n-4)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'abord strictement décroissante puis croissante.

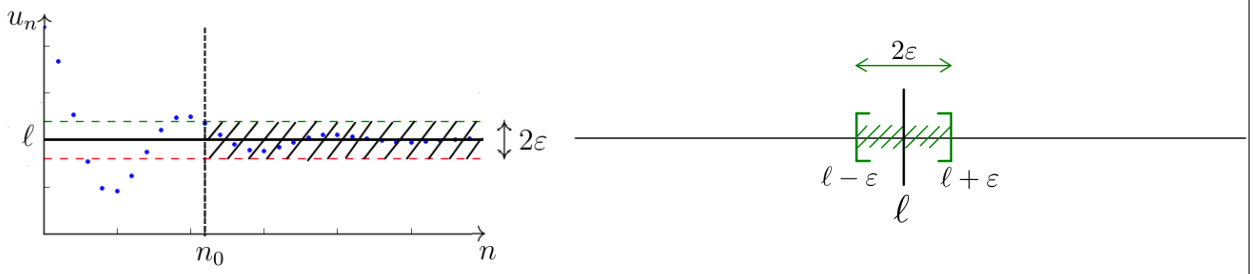
2 Convergence et divergence des suites réelles

Définition (Convergence)**.** *On dit qu'une suite réelle $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$* ***converge*** *vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si quel que soit $\varepsilon > 0$ (même très petit), à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, les u_n sont tous compris dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon\,,\, \ell + \varepsilon]$. Autrement dit, si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad tq \quad \forall n \geqslant n_0 \ , \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad tq \quad \forall n \geqslant n_0 \ , \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$



Une suite qui n'est pas convergente est dite ***divergente****.*

Notations. *Si u converge vers ℓ, on note au choix*

$$u \longrightarrow \ell \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad \lim u = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

ou de façon abusive mais tolérée quand il n'y a pas d'ambiguïté

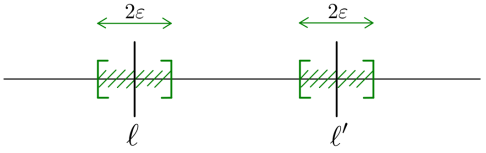
$$u_n \longrightarrow \ell \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \ell.$$

Propriétés (des suites convergentes)**.**

1. *Une suite ne peut pas avoir 2 limites différentes (unicité de la limite).*
2. *Si deux suites convergentes u et v vérifient $\lim u < \lim v$, alors à partir d'un certain rang, on a nécessairement $u_n < v_n$.*
3. *Si deux suites convergentes u et v vérifient $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim u \leqslant \lim v$. Cette propriété est fausse en général avec les inégalités strictes.*
4. *Une suite convergente est nécessairement bornée.*
5. *Si une suite u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, il en est de même pour toutes ses suites extraites.*
6. *Si $u_n \to \ell_u \in \mathbb{R}$ et $v_n \to \ell_v \in \mathbb{R}$ alors*
   - *(a)* $u_n + v_n \longrightarrow \ell_u + \ell_v$
   - *(b)* $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u_n \to \lambda \ell_u$
   - *(c)* $u_n \times v_n \longrightarrow \ell_u \times \ell_v$
   - *(d)* $|u_n| \to |\ell_u|$
   - *(e) si* $\ell_u \neq 0$, $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell_u}$
   - *(f) si* $u_n \to 0^+$ *alors* $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$ *(voir def. suivante)*

Démonstration.

1. Supposons que u converge à la fois vers ℓ et ℓ' et supposons, par l'absurde que $\ell \neq \ell'$. Quitte à inverser les rôles, supposons $\ell < \ell'$.
   Considérons un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que les deux intervalles $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ et $[\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon]$ soient disjoints, par exemple $\varepsilon := \frac{\ell' - \ell}{3}$.



   Par définition de la convergence vers ℓ, on a à partir d'un certain rang n_1 :

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

   et comme u converge aussi vers ℓ', on a à partir d'un certain rang n_2 :

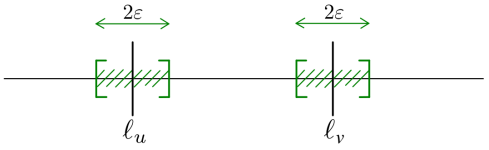
$$\ell' - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell' + \varepsilon$$

   Donc à partir du rang $n_3 := \max(n_1, n_2)$, on a :

$$u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \cap \left[\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon\right]$$

   ce qui est impossible, puisque cette intersection est vide. On a donc une contradiction.

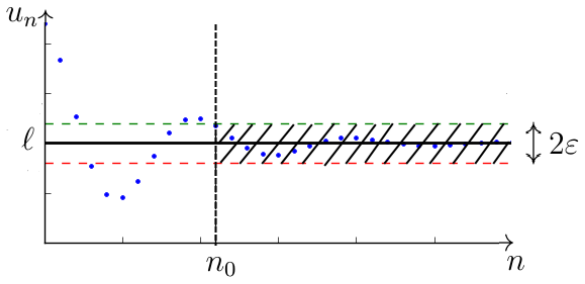
2. Notons $\ell_u := \lim u$ et $\ell_v := \lim v$. Considérons encore le réel strictement positif $\varepsilon := \frac{\ell_v - \ell_u}{3}$. Par le même raisonnement, à partir d'un certain rang, les u_n sont dans $[\ell_u - \varepsilon, \ell_u + \varepsilon]$ et les v_n dans $[\ell_v - \varepsilon, \ell_v + \varepsilon]$.



   D'où par transitivité : $u_n \leqslant \ell_u + \varepsilon < \ell_v - \varepsilon \leqslant v_n$.

3. Supposons u et v convergentes et $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Procédons par l'absurde et supposons $\lim u > \lim v$. D'après le point précédent, on dispose d'un rang à partir duquel $u_n > v_n$. Pour un rang assez grand on a donc $u_n > v_n \geqslant u_n$, ce qui est absurde.

4. Fixons u une suite convergente, et notons ℓ sa limite. Alors en appliquant la définition de la convergence avec par exemple $\varepsilon = 28$, on dispose d'un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 28$.



   Donc en particulier $|u_n| \leqslant 28 + |\ell|$ car par inégalité triangulaire on a

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leqslant |\ell| + |u_n - \ell| \leqslant |\ell| + 28.$$

   Les termes d'indices inférieurs à n_0 étant en nombre fini, ils sont bornés par

$$B := \max\left(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0 - 1}|\right).$$

   Finalement u est bornée par $M := \max\left(B, |\ell| + 28\right)$.

5. Supposons que u converge vers ℓ et fixons $\big(\varphi(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante. On peut tout d'abord remarquer qu'en conséquence de leur définition, les entiers $\varphi(n)$ vérifient $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, cela découle d'une récurrence simple. $\varphi(0) \geqslant 0$ (puisque $\varphi(0) \in \mathbb{N}$) et si l'on fixe $n \in \mathbb{N}$ et que l'on suppose $\varphi(n) \geqslant n$, on a par stricte croissance $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, c'est-à-dire $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n) + 1$, puisqu'il s'agit d'entiers, et comme $\varphi(n) \geqslant n$, on obtient $\varphi(n+1) \geqslant n+1$.
   Le principe de récurrence donne donc $\varphi(n) \geqslant n$ quel que soit l'entier naturel n.

   Montrons maintenant que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence de u, on dispose d'un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Or, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$.
   Donc $\big|u_{\varphi(n)} - \ell\big| \leqslant \varepsilon$.
   On a bien prouvé $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

6. On ne traite que le cas de la somme à titre d'exemple. Supposons donc que $u \longrightarrow \ell_u$ et $v \longrightarrow l_v$. Montrons que $u+v \longrightarrow \ell_u + \ell_v$. Fixons alors $\varepsilon > 0$. On dispose de deux entiers naturels N_u et N_v tels que
$$\forall n \geqslant N_u\,,\ |u_n - \ell_u| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant N_v\,,\ |v_n - \ell_v| \leqslant \varepsilon.$$
   Ainsi, si l'on pose $n_0 := \max(N_u, N_v)$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a
$$|(u+v)_n - (\ell_u + \ell_v)| = |u_n - \ell_u + v_n - \ell_v| \leqslant |u_n - \ell_u| + |v_n - \ell_v| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$
   Quitte à prendre $\varepsilon := \frac{\delta}{2}$ quel que soit le réel strictement positif δ, on a à partir d'un certain rang $|(u+v)_n - (\ell_u + \ell_v)| \leqslant \delta$.
   Ce travail prouve bien que $u + v \longrightarrow \ell_u + \ell_v$.

□

Cf exo 1

Définition (Divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$)**.** *On dit qu'une suite réelle $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$* ***diverge vers*** *$+\infty$ si quel que soit $M \in \mathbb{R}$ (même très grand), à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, les u_n sont tous supérieurs à M. Autrement dit, si :*

$$\forall M \in \mathbb{R}\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad tq \quad \forall n \geqslant n_0 \ , \quad u_n \geqslant M$$

On note alors $u \longrightarrow +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\lim u = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On définit de même la divergence vers $-\infty$ par

$$\forall m \in \mathbb{R}\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad tq \quad \forall n \geqslant n_0 \ , \quad u_n \leqslant m$$

Propriétés (des suites divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$)**.**

— *Si une suite u diverge vers $+\infty$, il en est de même pour toutes ses suites extraites.*

— *Si u diverge vers $+\infty$ et v converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors :*

1. $u_n + v_n \to +\infty$
2. *si* $\ell \neq 0$, $(u_n \times v_n) \longrightarrow \begin{cases} +\infty \text{ si } \ell > 0 \\ -\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases}$
3. $\dfrac{1}{u_n} \to 0^+$

— *On a les propriétés symétriques pour les suites qui divergent vers $-\infty$.*

Démonstrations : admises (sans grande difficulté, manipulation des définitions).

Proposition (Suites extraites d'indices pairs et impairs)**.** *Soit u une suite réelle. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent la même limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

Démonstration. Dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, fixons $\varepsilon > 0$ et notons $V := [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$; dans le cas où $\ell = +\infty$, fixons $A \in \mathbb{R}$ et notons $V := [A, +\infty[$ et dans le cas où $\ell = -\infty$, fixons $B \in \mathbb{R}$ et notons $V :=]-\infty, B]$. Dans tous les cas, on doit montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \in V$. Or, par définition de la limite, il existe deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que

$$\forall n \geqslant n_1\,,\ u_{2n} \in V \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant n_2\,,\ u_{2n+1} \in V.$$

Ainsi, si l'on pose $k_0 := \max(2n_1, 2n_2+1)$, alors pour tout entier naturel $k \geqslant k_0$, on a bien $u_k \in V$. En effet :

- si k est pair, $k = 2n$ avec $n := \frac{k}{2} \geqslant \frac{2n_1}{2} = n_1$, donc $u_{2n} \in V$ (c'est-à-dire $u_k \in V$) ;
- si k est impair, $k = 2n+1$ avec $n := \frac{k-1}{2} \geqslant \frac{2n_2+1-1}{2} = n_2$, donc $u_{2n+1} \in V$ (et donc $u_k \in V$).

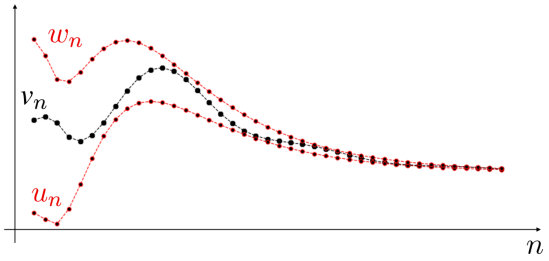
Ce travail montre bien que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. □

3 Quatre théorèmes d'existence de limites

Théorème (Théorème des gendarmes/limite par encadrement)**.** *Soient u, v et w trois suites réelles telles que :*

- *u et w convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$;*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*

Alors $v_n \to \ell$.



Démonstration. Montrons que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur u et w, il existe deux entiers naturels N_u et N_w tels que

$$\forall n \geqslant N_u\,,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant N_w\,,\ |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc en particulier, pour tout entier naturel $n \geqslant \max(N_u, N_w)$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \quad \text{et} \quad w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

et donc, puisque $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, on obtient

$$\ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Ce travail étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien prouvé $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. □

Théorème (Limite par comparaison)**.** *Soient u et v deux suites réelles.*

1. *Si* $\begin{cases} u_n \to 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ |v_n| \leqslant u_n \end{cases}$ *alors $v_n \to 0$.*
2. *Si* $\begin{cases} u_n \to +\infty \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n \geqslant u_n \end{cases}$ *alors $v_n \to +\infty$. (limite par minoration)*
3. *Si* $\begin{cases} u_n \to -\infty \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n \leqslant u_n \end{cases}$ *alors $v_n \to -\infty$. (limite par majoration)*

Démonstration.

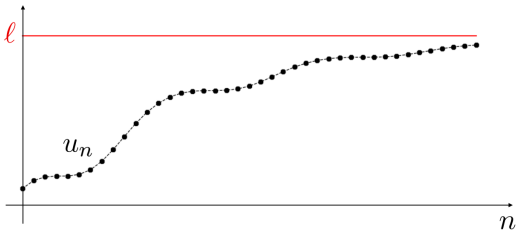
1. L'inégalité $|v_n| \leqslant u_n$ signifie $-u_n \leqslant v_n \leqslant u_n$. Si l'on suppose de plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par le théorème des gendarmes.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \geqslant u_n$ quel que soit l'entier naturel n, alors fixant A un réel, on dispose d'un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$, et donc $v_n \geqslant A$. Ceci prouve bien $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $v_n \leqslant u_n$ quel que soit l'entier naturel n, alors fixant A un réel, on dispose d'un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant A$, et donc $v_n \leqslant A$. Ceci prouve bien $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

□

Remarque. *Les deux théorèmes précédents s'appliquent aussi lorsque les inégalités sont vraies uniquement à partir d'un certain rang.*

Théorème (de la limite monotone)**.** *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **croissante**.*

- *Si u est majorée, alors la suite converge (vers une limite ℓ qui est la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).*



- *Si u n'est pas majorée, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

*Symétriquement, une suite **décroissante** converge si elle est minorée, et diverge vers $-\infty$ sinon.*

Démonstration.

- Supposons que u est majorée. L'ensemble $A := \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est donc majoré. Puisque A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, elle admet une borne supérieure. Notons $\ell := \sup(A)$.
  Montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On a bien sûr $u_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque ℓ est un majorant de u.
  Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Par la remarque page 2 (borne sup "presque atteinte"), l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell]$ contient au moins un élément de A, c'est-à-dire un terme u_{n_0} de la suite u. Or, par croissance de u, on a pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant u_n \qquad \text{et donc} \qquad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell$$

  Ce travail prouve bien que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- Supposons que u n'est pas majorée et montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Ce réel M ne majore pas u (puisque u n'est pas majorée), donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant M$. Par croissance de u, on a pour tout $n \geqslant n_0$

$$u_n \geqslant u_{n_0} \qquad \text{et donc par transitivité} \qquad u_n \geqslant M.$$

  Ce travail étant vrai pour tout $M \in \mathbb{R}$, on a bien montré que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

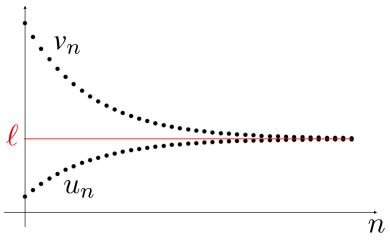
□

Cf exo 2

Théorème (Convergence des suites adjacentes)**.** *Soient u et v deux suites à valeurs réelles telles que :*

- *u est croissante ;*
- *v est décroissante ;*
- *$(u_n - v_n) \to 0$.*

Alors u et v sont convergentes et ont même limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.



Démonstration. Il suffit de prouver que u converge, car alors

$$v_n = \underbrace{v_n - u_n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lim u$$

Comme u est croissante, il suffit même de prouver qu'elle est majorée en vertu du théorème de la limite monotone.
Or, par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On sait par hypothèse qu'elle tend vers 0, donc par le théorème de la limite monotone, 0 est la borne supérieure des valeurs de cette suite, ce qui signifie en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - v_n \leqslant 0$$

D'où $u_n \leqslant v_n$, et comme v est décroissante, $v_n \leqslant v_0$. D'où $u_n \leqslant v_0$. La suite u est donc majorée (et croissante), donc elle converge, et comme nous l'avons vu en début de démonstration, v converge vers la même limite. □

4 Extension aux suites à valeurs complexes

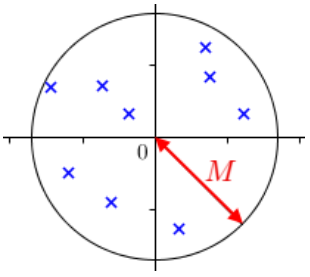
Notation. *L'ensemble des suites à valeurs complexes est noté* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Attention ! le symbole $\leqslant$ n'a aucun sens entre 2 complexes. ex : $2+i \leqslant 3$! ? ! ? ! Par conséquent, les notions de :

— suite croissante/décroissante ;
— suite divergente vers $+\infty$;
— suite majorée/minorée ,

n'ont pas de sens pour les suites à valeurs complexes. Par suite, pas de théorème des gendarmes, pas de convergence monotone et pas de suites adjacentes.

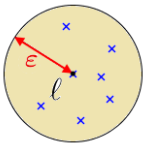
En revanche, on dispose dans $\mathbb{C}$ d'une **distance** entre 2 complexes z_1 et z_2 : le module de leur différence $|z_1 - z_2|$. Ainsi, si u est une suite à valeurs complexes, on dit que



► u est **bornée** si $\boxed{\exists M \geqslant 0 \ \text{ tq } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leqslant M}$.

Autrement dit, s'il existe un disque de centre 0 (M joue ici le rôle du rayon) qui contient tous les u_n.

► u **converge** vers $\ell \in \mathbb{C}$ si $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{ tq } \ \forall n \geqslant n_0 \ , \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon}$.



Autrement dit, si quel que soit $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, tous les u_n sont dans le disque de centre ℓ et de rayon ε.
Par définition, $u_n \to \ell$ (convergence dans $\mathbb{C}$) signifie donc que $|u_n - \ell| \to 0$ (convergence dans $\mathbb{R}$).

Comme pour les suites réelles, une suite complexe qui converge est nécessairement bornée. On dispose également des opérations sur les limites finies : Si $u_n \to \ell_u \in \mathbb{C}$ et $v_n \to \ell_v \in \mathbb{C}$ alors

1. $u_n + v_n \longrightarrow \ell_u + \ell_v$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda u_n \to \lambda \ell_u$
3. $u_n \times v_n \longrightarrow \ell_u \times \ell_v$
4. $|u_n| \to |\ell_u|$
5. si $\ell_u \neq 0$, $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell_u}$

Démontrer qu'une suite complexe u converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$ revient souvent à étudier la quantité $|u_n - \ell|$, en montrant par exemple qu'elle est inférieure à une suite qui tend vers 0. On peut également étudier séparément la partie réelle et la partie imaginaire, grâce au théorème suivant :

Théorème. *Soit* $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs complexes, et soit* $\ell \in \mathbb{C}$. *Il y a équivalence entre :*

1. $u_n \longrightarrow \ell$
2. $\begin{cases} Re(u_n) \to Re(\ell) \\ Im(u_n) \to Im(\ell) \end{cases}$

5 Suites de référence

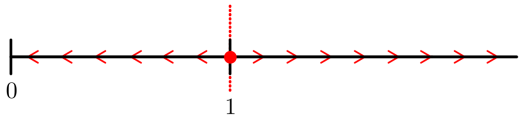
5.1 Suites du type $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

▶ Dans le cas où $q > 0$, on a :

$$\boxed{q^n = e^{n\ln(q)}}$$

donc :

- si $q \in]1, +\infty[$, $\ln(q) > 0$, donc $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;
- si $q = 1$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à 1 ;
- si $q \in]0, 1[$, $\ln(q) < 0$ donc $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.



En outre, les croissances comparées donnent, pour tout $\alpha > 0$:

- Si $q > 1$, $\dfrac{n^\alpha}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par exemple, $\dfrac{n^{28}}{(1,001)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $q \in]0, 1[$, $q^n n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par exemple, $(0,999)^n n^{28} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour information (on le verra en exercice), on a pour tout $q > 1$: $\dfrac{q^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

▶ Dans le cas où $q < 0$, alors q est du type $q = -r$, avec $r > 0$, et $q^n = (-r)^n = (-1)^n r^n$. On se ramène donc au cas précédent, mais avec une alternance de signe. En en déduit que :

- si $q \in]-1, 0[$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $|q^n| = r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) ;
- si $q = -1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune limite ;
- si $q \in]-\infty, -1[$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune limite car $q^{2n} = r^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $q^{2n+1} = -r^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

On constate donc que pour $q \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff q \in]-1, 1[\iff |q| < 1$$

et de façon générale, pour $q \in \mathbb{C}$:

$$q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |q| < 1$$

5.2 Suites arithmético-géométriques

Définition. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmético-géométrique** s'il existe des constantes $a, b \in \mathbb{C}$ telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \qquad (*)$$

Remarque. *Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nb$.*

Proposition. *Soit $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 1$. Il existe une unique suite constante vérifiant $(*)$. Appelons λ cette constante complexe. De plus si u est une suite vérifiant $(*)$, alors $u - \lambda$ est une suite géométrique de raison a.*

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\lambda = a\lambda + b &\iff \lambda(1-a) = b \\ &\iff \lambda = \frac{b}{1-a} \qquad (a \neq 1 \text{ donc } a-1 \neq 0)\end{aligned}$$

Soit u vérifiant $(*)$. Vérifions que la suite v définie par $v_n = u_n - \lambda$ est géométrique de raison a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - \lambda \\ &= \big(au_n + b\big) - \big(a\lambda + b\big) \\ &= a(u_n - \lambda) \\ &= av_n\end{aligned}$$

Ainsi, v est bien géométrique de raison a. □

Conséquence. *Avec les notations de la proposition précédente, ce résultat permet d'obtenir une expression explicite d'une suite u vérifiant $(*)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$v_n = a^n v_0 \quad \text{donc} \quad u_n = v_n + \lambda = a^n(u_0 - \lambda) + \lambda.$$

Cf exo 7

5.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition. *Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite* ***récurrente linéaire d'ordre 2*** *s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ (avec $b \neq 0$) tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (**)$$

ou autrement dit $u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0$.

On considère le "polynôme caractéristique" $P : t \mapsto t^2 - at - b$ et son discriminant Δ.

▶ **Détermination du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas général (cas complexe) :**

- Si $\Delta \neq 0$, les racines complexes q_1 et q_2 de P sont distinctes, et les suites qui vérifient $(**)$ sont les suites de la forme
$$u_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n \qquad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$
- Si $\Delta = 0$, P admet une racine double $q_0 \in \mathbb{C}$, et alors les suites qui vérifient $(**)$ sont les suites de la forme
$$u_n = (C_1 + C_2 n) q_0^n \qquad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

▶ **Cas réel ($a, b \in \mathbb{R}$ et on cherche les suites à valeurs réelles uniquement) :**

- Si $\Delta > 0$, les racines q_1 et q_2 sont réelles (et distinctes), et alors les suites recherchées sont les suites de la forme :
$$u_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n \qquad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
- Si $\Delta = 0$, et $q_0 \in \mathbb{R}$ désigne la racine double de P, les suites recherchées sont les suites de la forme :
$$u_n = (C_1 + C_2 n) q_0^n \qquad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
- Si $\Delta < 0$, les racines sont complexes conjuguées : $q_1 = re^{i\theta}$ et $q_2 = \bar{q_1} = re^{-i\theta}$. Les suites recherchées sont alors les suites de la forme :
$$u_n = r^n\big(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\big) \qquad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

Dans tous les cas, on détermine éventuellement les 2 constantes si l'on dispose de valeurs connues, comme par exemple les deux premières u_0 et u_1, en résolvant un système à 2 équations 2 inconnues.

Cf exo 7

Epilogue : caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Proposition (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)**.** *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\alpha = \sup(A)$.
2. *α est un majorant de A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers α.*

Démonstration.

- Montrons $2 \Rightarrow 1$. Supposons que α est un majorant de A pour lequel on dispose d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Montrons que α est la borne supérieure de A.
  On sait déjà que α est un majorant de A. Reste à montrer que c'est le plus petit d'entre eux. Soit donc M un majorant de A. Alors
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant M\ ,\ \text{puisque } a_n \in A$$
  Donc par passage à la limite dans les inégalités larges, $\alpha \leqslant M$ comme voulu.
  Conclusion : $\alpha = \sup(A)$.
- Montrons $1 \Rightarrow 2$. Supposons que α est la borne supérieure de A. Par définition, α est un majorant de A, et il n'y a plus qu'à construire une suite d'éléments de A convergeant vers α.
  Or, d'après la remarque page 2 (borne sup "presque atteinte"), pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[\alpha - \varepsilon, \alpha]$ contient au moins un élément de A. On peut utiliser cette propriété pour des quantités ε de plus en plus petites.
  Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette propriété appliquée à $\varepsilon = \frac{1}{n}$ donne que l'intervalle $\left[\alpha - \frac{1}{n}, \alpha\right]$ contient au moins un élément de A. Cet élément (qui dépend de n) peut être noté a_n. On a ainsi construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  - $a_n \in A$;
  - $\alpha - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

  Par le théorème des gendarmes, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.
  L'implication est bien démontrée.

□

Remarque. *Symétriquement, pour une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée, on a pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ l'équivalence entre les deux phrases suivantes :*

1. $\beta = \inf(A)$.
2. *β est un minorant de A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers β.*

Cf exo 9